Comparologie

WB1642 Werktuigkundig Ontwerpproject 2

Freek Broeren

TU Delft | Mechanical Engineering

2024-12-19

Inhoudsopgave

◎ Leerdoelen

Na het bestuderen van deze stof kun je

- Geometrische schaling toepassen
- Berekenen wat het effect van schaling is op de prestatie van een ontwerp, met betrekking tot
  - Volume en Massa
  - Stijfheid en Sterkte
  - Energie en Vermogen
  - Eigenfrequentie

Figuur 1: Door gebruik te maken van schaalmodellen kunnen we voorspellingen maken over de prestaties van grote ontwerpen.

Comparologie

Schaalmodellen zijn vaak een onderdeel van het ontwerpproces. We gebruiken ze wanneer het niet haalbaar is om proefmodellen en prototypes op ware schaal te maken. In het geval van een heel groot eindproduct, zoals een schip of een windmolen, spreekt dit voor zich. Het kan echter ook dat het eindproduct te klein is om te maken met de beschikbare technieken. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de kleine elektromechanische componenten die in je telefoon zitten om versnellingen en het aardmagnetisch veld te meten.

Schaalmodellen gebruiken we om onze ontwerpkeuzes te evalueren. Echter heeft de schaling van het ontwerp naar een maakbare grootte ook effect op de prestaties van ons ontwerp. Het bestuderen en doorrekenen van dit effect noemen we *comparologie*[1].

Geometrisch schalen

In veel gevallen zullen we een schaalmodel verkrijgen door alle afmetingen met dezelfde factor te vergroten of verkleinen. Dit noemen we *geometrisch schalen*. Hierbij hebben we het voordeel dat alle vormen die we ontworpen hebben behouden blijven. We zullen echter zien dat dat niet betekent dat de andere eigenschappen van het ontwerp ook hetzelfde blijven.

In deze uitleg zullen we voor verschillende gevallen bekijken wat het effect van geometrisch schalen is. Laten we echter eerst even teruggaan naar het filmpje waar we mee begonnen.

Schaling in het model van de baai van San Francisco

In Figuur 1 zagen we dat dit schaalmodel van de baai van San Francisco niet geometrisch geschaald was. De schalingsfactor in de horizontale richtingen is daar 1:1000, terwijl deze in de hoogte 1:100 is. Daarnaast zijn er koperen obstakels in het water geplaatst om de stroomsnelheid door de baai af te stellen. Daarmee is de tijdsschaling (ja, ook tijd kunnen we schalen) 1:100.

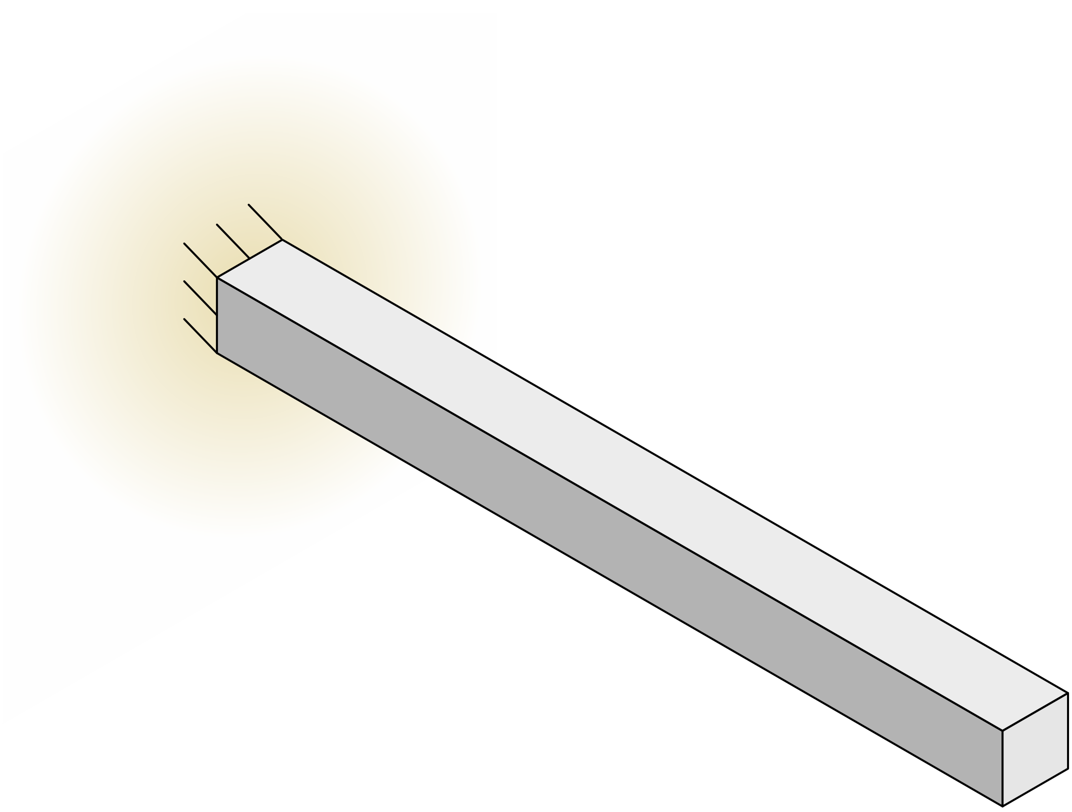
In dit geval is dit gedaan om alle onderdelen van het model goed te laten werken en een betrouwbare vertaling te kunnen maken van de eigenschappen van het schaalmodel naar de werkelijkheid. Dit was voornamelijk nodig om de stroming door de ondiepe delen goed te laten verlopen(San Francisco Bay Model Visitors Center, z.d.).

Een balk

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld: wat gebeurt er met een balk wanneer we die geometrisch schalen?

Als origineel kijken we naar een aluminium balk met een lengte L van drie meter. De balk heeft een vierkante doorsnede met zijden w van 100mm en is eenzijdig ingeklemd.

[1] de term “comparologie” komt uit (Cool e.a. 2023, hfdst. 12). Dit hoofdstuk vormt ook de basis voor deze pagina en het bijbehorende college.



Figuur 2: Een eenzijdig ingeklemde balk

Schaling van de massa

Met de dichtheid uit het formuleboekje[2], kunnen we eenvoudig de massa van deze balk berekenen als het product van de dichtheid en het volume:

$$m = \rho w^2 L = 81{,}0\,\text{kg}$$

Wat zal er gebeuren met deze massa wanneer we de balk geometrisch schalen met een factor $S = 0.1$? Zowel de lengte, als beide breedtes van de doorsnede zullen dan een factor 10 kleiner worden. De dichtheid van het materiaal zal daarentegen niet veranderen.

$$\begin{aligned} L &\to S \cdot L \\ w &\to S \cdot w \\ \rho &\to \rho \end{aligned}$$

Op deze schaal wordt de massa

$$\begin{aligned} m_S &= \rho\,(wS)^2\,LS \\ &= \rho w^2 L S^3 \\ &= 0{,}0810\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Door de balk in alle richtingen een factor tien kleiner te maken, wordt de massa dus een factor duizend (10^3) kleiner. Dit zagen we natuurlijk ook al terug in de formule, waar de schaalfactor S tot de derde macht in kwam te staan.

Schaling van de doorbuiging

Dat de massa met de derde macht van de schaalfactor verandert, kon je waarschijnlijk al wel bepalen op basis van je intuitie. Het wordt wat interessanter wanneer we kijken naar de doorbuiging van de balk onder zijn eigen gewicht.

Hiervoor kijken we opnieuw naar het formuleboekje[3]. Daar zien we dat de maximale doorbuiging van een balk onder een verdeelde belasting gegeven wordt door

$$\delta = \frac{qL^4}{8EI}.$$

[2] (van Beek 2024), pagina 31
[3] (van Beek 2024), pagina 6

Wanneer we geometrische schaling toepassen, zal natuurlijk de lengte L van de balk veranderen. Wat misschien minder voor de hand ligt, is dat ook de belasting q en het oppervlaktetraagheidsmoment I veranderen onder schaling. Van de vier symbolen in de formule, blijft alleen de elasticiteitsmodulus E constant.

De belasting q is hier het gevolg van het gewicht van de balk. Deze beschouwen we als een constante verdeelde belasting over de gehele lengte van de balk. Daarom geldt

$$q = \frac{m}{L} = \frac{\rho w^2 L}{L} = \rho w^2.$$

Aangezien de dikte van de balk hier nog tot de tweede macht in staat, zal deze belasting dus met S^2 schalen.

Het oppervlaktetraagheidsmoment van een vierkant profiel wordt gegeven door

$$I = \frac{1}{12} w^4.$$

Deze zal dus met een factor S^4 schalen.

Wanneer we dit allemaal samen nemen, krijgen we het volgende resultaat:

$$\delta = \frac{3\rho L^5}{2Ew^2 A}$$

Hier zien we boven de deelstreep de lengte van de balk tot de vijfde macht staan, en onder de deelstreep de breedte tot de tweede macht. Onder geometrisch schalen, zal de doorbuiging dus met de schaalfactor tot de derde macht gaan:

$$\delta_S = \frac{3\rho}{2E} \frac{S^5 L^5}{S^2 w^2} = \frac{3\rho L^5}{2Ew^2} S^3.$$

Wanneer we de balk tien keer zo klein maken, zal de doorbuiging door het eigen gewicht dus duizend keer zo klein worden.

formules komen uit het formuleboekje (van Beek 2024)

Schaling van de klauteraar

In dit project ontwerpen jullie een klauteraar die een paal van 3 meter moet kunnen beklimmen. Voor de meeste praktische toepassingen is 3 meter wat weinig. Stel we willen een paal van 15 meter beklimmen. Kunnen we dan ons ontwerp geometrisch schalen met $S = 5$?

Eerder, in , zagen we al dat, wanneer we wrijving verwaarlozen, de hoogte die we maximaal kunnen halen afhangt van de massa van de klauteraar en de energie die in de veer opgeslagen kan worden. Wanneer we ons ontwerp geometrisch schalen, zal de massa van de klauteraar toenemen met S^3. Voor $S = 5$ betekent dit dus dat de klauteraar 125 keer zo zwaar wordt.

Wat gebeurt er met de maximale veerenergie die we mee kunnen nemen als gevolg van het geometrisch schalen?

In het formuleboekje[4] vinden we dat de maximale kracht kracht en uitrekking van de veer als volgt berekend kunnen worden:

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= \frac{\pi}{16}\frac{d^3}{r}\tau_{\text{max}} \\ f_{\text{max}} &= \frac{64nr^3}{d^4G}F_{\text{max}} \\ &= \frac{4\pi nr^2}{Gd}\tau_{\text{max}}. \end{aligned}$$

Hierbij is d de diameter van de draad, r de diameter van de windingen, n het aantal windingen, G de glijdingsmodulus en τ_{max} de maximale toelaatbare schuifspanning in het materiaal. Als we alleen kijken naar de onderdelen die veranderen met de grootte van de veer krijgen we

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &\propto S^2 \\ f_{\text{max}} &\propto S. \end{aligned}$$

Aangezien $E_{\text{max}} = \frac{1}{2}F_{\text{max}}f_{\text{max}}$, vinden we dat

$$E_{\text{max}} \propto S^3.$$

Aangezien uit al bleek dat $h_{\text{max}} = \frac{E_{\text{max}}}{mg}$, volgt nu dat

$$h_{max} \propto S^0.$$

Oftewel, wanneer we het ontwerp geometrisch schalen zal de maximale bereikbare hoogte niet veranderen. Om het ontwerp te vertalen naar een situatie waarin een hogere paal beklommen moet worden, zal het dus niet voldoende zijn om het ontwerp eenvoudigweg in alle richtingen op te schalen.

[4] (van Beek 2024), pagina 8

Een schaalmodel voor een horloge

Een horloge bestaat uit veel kleine onderdelen waar nauwkeurige en gespecialiseerde maakmethoden voor nodig zijn. Het is niet altijd mogelijk om prototypes voor een nieuw horlogeontwerp op ware schaal te maken. In plaats daarvan zal er vaak voor gekozen te worden om de eerste modellen op een grotere schaal dan het uiteindelijke horloge te maken.

De oscillator van een horloge is vaak een massa-veer systeem. Om de prestaties van het model op grote schaal goed te beoordelen, moeten we weten hoe de frequentie zal schalen wanneer we naar de uiteindelijke afmetingen gaan. In dit voorbeeld zullen we kijken naar dit gedrag.

In het formuleboekje[5] zien we dat de eigenfrequentie van een massa-veer systeem gegeven wordt door

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

waar k de stijfheid van de veer is, en m de massa van het trillende object. Zoals we al eerder zagen, schaalt de massa m met S^3. De kracht en uitrekking van een trekveer schalen, zoals we al eerder zagen, met respectievelijk S^2 en S. Daaruit volgt dat

$$k = \frac{F}{f} \propto S.$$

Voor de eigenfrequentie geldt dus

$$\begin{aligned} \omega_0 &\propto \sqrt{\frac{S}{S^3}} \\ &\propto \frac{1}{S}. \end{aligned}$$

Wanneer we dus een schaalmodel maken dat vier keer zo groot is, moeten we dit ontwerpen op een eigenfrequentie de een kwart is van wat deze in het uiteindelijke horloge moet zijn.

Deze schaling komen we in veel gevallen tegen: hoe groter en zwaarder een object is, hoe lager zijn eigenfrequentie meestal zal zijn. Dit is ook meteen waarom een grote kerkklok lager klinkt dan een kleinere klok.

Opvallend is dat we deze schalingsverhouding ook tegenkomen bij strijkinstrumenten. Een cello is ongeveer twee keer zo groot als een viool. De grondtoon van een cello is dan ook de helft van die van een viool. Dit komt precies overeen met een octaaf.

[5] (van Beek 2024), pagina 9

Afsluiting

Een veelvoorkomende manier van schaalmodellen maken is om het ontwerp *geometrisch te schalen*. Daarbij worden alle afmetingen met dezelfde factor S vermenigvuldigd.

Wanneer we dit doen, heeft dit ook effect op de prestaties en eigenschappen van het model. Ook al worden alle verhoudingen tussen de afmetingen behouden, dat betekent niet dat ook de andere eigenschappen, zoals massa, stijfheid en eigenfrequentie behouden blijven.

In de voorbeelden die we hier besproken hebben zagen we dat bij geometrisch schalen het volume en de massa van het ontwerp met S^3 vermenigvuldigd worden. De stijfheid van een trekveer schaalt met S^2, en de maximale energieinhoud van deze veer gaat met S^3. Tenslotte zagen we dat de eigenfrequentie van een massa-veer systeem schaalt met S^{-1}.

Bij het ontwerpen van schaalmodellen zullen we hier rekening mee moeten houden. De prestaties van het model op de ware grootte (of deze nou kleiner of groter is dan ons schaalmodel) kunnen immers flink afwijken van die van ons schaalmodel. Door de schaling van de prestatiecriteria goed in de gaten te houden, kunnen we ons ervan verzekeren dat de prestaties van ons uiteindelijke ontwerp overeenkomen met de eisen.

Bronnen

Cool, Jan C., Gabriëlle J. M. Tuijthof, Giuseppe Radaelli, en Regine W. Vroom. 2023. *Werktuigkundige Systemen*. *TU Delft OPEN Textbooks*. TU Delft OPEN Textbooks. https://doi.org/10.59490/t.2023.006.

San Francisco Bay Model Visitors Center. z.d. 'San Francisco Bay Model - Technical Side'. *San Francisco District*. https://www.spn.usace.army.mil/Missions/Recreation/Bay-Model-Visitor-Center/The-Bay-Model-Journey/Technical-Side/.

van Beek, Anton. 2024. *Formule Boekje*. 9de dr. Mikro Centrum.